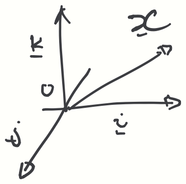
2. ÓRA

Skaláris szorzás: $\underline{u}, \underline{v} \to$ szám



$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \underline{i} + x_2 \cdot \underline{j} + x_3 \cdot \underline{k}$

sk. szorzat:

def. $\underline{x} \cdot \underline{y} = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cdot \cos(\gamma)$ — az általuk bezárt hegyesszög.

áll. $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$

Feladatok:

1. Mi a $(2,3,-1)$, $(-1,1,6)$ vektorok hajlásszögének koszinusza?

2. $|a| = 2$, $|b| = 5$ $\quad \gamma = 2\pi/3$

   mely t-re $t\underline{a} + 17\underline{b} \perp 3\underline{a} - \underline{b}$?

3. Adjuk meg $\underline{a}$ $\underline{b}$-re merőleges és azzal párh. komponenseit, ha $\underline{a} = (3,2,2)$, $\underline{b} = (4,-2,2)$.

4.[k] Biz. be a koszinusztételt sk. szorzás segítségével. $(c^2 = a^2 + b^2 - 2|a||b|\cos(\gamma))$

5.[v] $\underline{e}^{\overrightarrow{OY}}$ tetsz. egységvektor, a sík mely X pontjaira telj., hogy $\underline{e} \cdot \overrightarrow{OX} = k$, valamely k fix konstansra?

Vektoriális szorzás: $\underline{u}, \underline{v} \to \underline{w}$, (vektor, vektor) $\to$ vektor

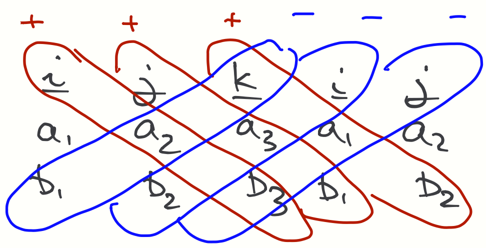
def. $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok vektoriális szorzata $\underline{a} \times \underline{b}$, melyre telj.

A/ $|\underline{a} \times \underline{b}| = |a| \cdot |b| \cdot \sin(\gamma)$

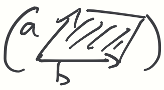
B/ $\underline{a} \times \underline{b} \perp \underline{a}, \underline{b}$

C/ $\underline{a}, \underline{b}, \underline{a} \times \underline{b}$ ebben a sorrendben jobbsodrású rsz-t alkot

áll. $\to \underline{a} \times \underline{b} = \underline{i}\, a_2 b_3 + \underline{j}\, a_3 b_1 + \underline{k}\, a_1 b_2 - \underline{k}\, a_2 b_1 - \underline{i}\, a_3 b_2 - \underline{j}\, a_1 b_3$



$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ b_1 a_3 - a_1 b_3,\ a_3 b_1 - a_1 b_3)$

$\to |\underline{a} \times \underline{b}| = T($  $)$

Feladatok: L! $\underline{a}=(5,4,2)$, $\underline{b}=(1,-3,2)$

1. • $\underline{a}\times\underline{b}=?$
   • $\underline{b}\times\underline{a}=?$
   • az $\underline{a}$ & $\underline{b}$ által kif. háromszög területe?

2*. Ha $\underline{a}\times\underline{b}=\underline{a}\times\underline{c} \Rightarrow \underline{b}=\underline{c}$? S: $a\times b + a\times c = a\times(b+c)$

3*. Mi az $|\underline{e}\times\underline{a}|$ és $(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e}$ geom. jelentése, ha $\underline{e}$ 1ség vektor? Vezessük le ebből, hogy az $\underline{a}$ $\underline{e}$-re merőleges komponense $(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e}$!

Vegyesszorzat ($\underline{a},\underline{b},\underline{c} \to$ k szám)

Def. Az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok vegyesszorzatán az

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$$

számot értjük.

Áll:

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{array}$$

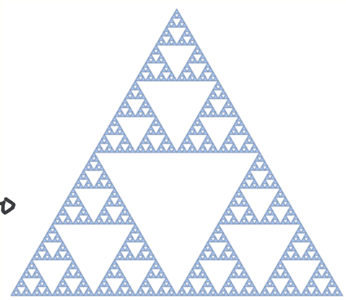
$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Megj: $(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$ az $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ vektorok által kif. paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg.

Feladatok

1. Számoljuk ki $\underline{a}=(0,2,3)$ $\underline{b}=(5,-1,2)$, $c=(1,2,1)$ vegyesszorzatát.
2. Mely z-re lesz egy síkban $\underline{u}=(3,2,1)$, $\underline{v}=(5,1,2)$, $\underline{w}=(3,4,z)$?
3. Adjuk meg az $A(4,-1,2)$, $B(5,3,2)$, $C(-1,2,2)$, $D(3,5,4)$ pontok által kif. tetraéder térfogatát.

Sierpiński háromszög →



Megoldások

Jelölések:

- $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$: vektor
- $\underline{x} \cdot \underline{y}$: $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok skaláris szorzata
- $\underline{x} * k$: az $\underline{x}$ k számszoros (csak ahol fontos kiemelni)
- $\underline{x} \times \underline{y}$: $\underline{x}$ és $\underline{y}$ vektorok vektoriális szorzata
- $A(x_1, x_2, x_3)$: egy pont a térben
- O: origó
- $\underline{a}^2 = |\underline{a}|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ standard bázis
- $\Leftrightarrow$, $\Leftrightarrow$: akkor és csak akkor
- $\Rightarrow$: akkor

① Jel. γ $\underline{x}$ és $\underline{y}$ hajlásszögét.
Sk. szorzat 2 módon:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = -2 + 3 - 6 = -5$$
$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{38} \cdot \cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-5}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{38}}$$

②

$$t\underline{a} - 17\underline{b} \perp 3\underline{a} - \underline{b} \Leftrightarrow (t\underline{a} + 17\underline{b}) \cdot (3\underline{a} - \underline{b}) = 0$$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$ & disztributív $\longrightarrow$ ‖

$$t \cdot 3 \cdot |\underline{a}|^2 - t\underline{a} \cdot \underline{b} + 17 \cdot 3 \cdot \underline{a} \cdot \underline{b} - 17|\underline{b}|^2$$

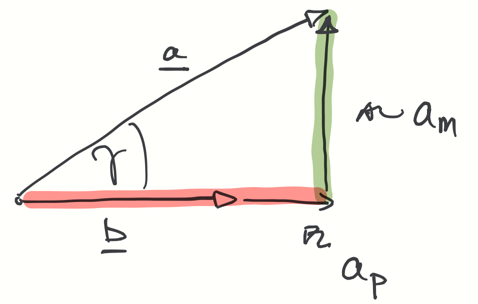
$|\underline{a}| = 2$, $|\underline{b}| = 5$, $\longrightarrow$ ‖

$$t \cdot 12 + (51 - t)\,\underline{a}\,\underline{b} - 425 = 0$$

$\underline{a} \cdot \underline{b} = 2 \cdot 5 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -5$ $\longrightarrow$ ‖

$$t \cdot (12 + 5) - 255 - 425 = 17t - 680 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$t = 40$$

③

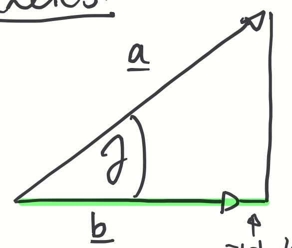


- $\underline{a}_p = \underbrace{\underline{a} \cdot \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}}_{|\underline{a}| \cdot \cos\gamma} * \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|} = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} * \underline{b} = \frac{1}{2}\underline{b} = (2, -1, 1)$

$\hookrightarrow$ $\underline{a} \cdot \underline{b} = 12 - 4 + 4 = 12$
$|\underline{b}|^2 = 16 + 4 + 4 = 24$

- $\underline{a}_m = \underline{a} - \underline{a}_p = (1, 3, 1)$

Levezetés:



azöld hossza c.

$\underline{a}_p$ iránya megegyezik $\underline{b}$ irányával, tehát $\underline{a}_p = c \cdot \frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$ valamilyen c számra.

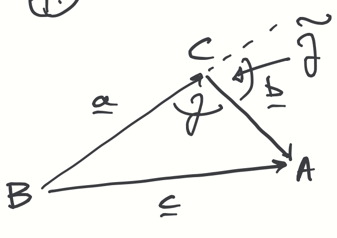
$\frac{\underline{b}}{|\underline{b}|}$: a $\underline{b}$ irányú 1ségvektor.

Mi lesz c? A derékszögű Δ-et vizsgálva:

$$\cos(\gamma) = \frac{c}{|\underline{a}|} \Rightarrow c = \cos(\gamma) \cdot |\underline{a}| = \underline{a} \cdot \underline{b} * \frac{1}{|\underline{b}|}$$

Tehát $\boxed{\underline{a}_p = \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{|\underline{b}|^2} * \underline{b}}$

④



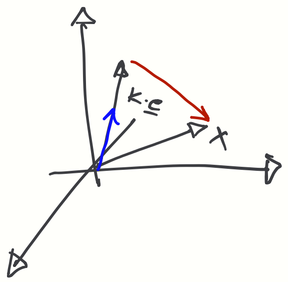
koszinusztétel:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2|a||b| \cdot \cos\gamma =$$
$$= a^2 + b^2 - 2|a||b|\cos(\pi - \tilde{\gamma}) =$$
$$= a^2 + b^2 + 2|a||b| \cdot \cos\tilde{\gamma} =$$
$$= a^2 + b^2 + 2\,\underline{a}\,\underline{b}$$

másrészt:

$$c^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\underline{a}\underline{b} \;\; \smile$$

⑤ $\underline{e}\cdot\vec{OX} = k \Leftrightarrow \underline{e}\cdot\vec{OX} = \underline{e}\cdot(k\underline{e}) \Leftrightarrow \underline{e}\cdot\vec{OX} - \underline{e}(k\cdot\underline{e}) = 0$



x abban a síkban van, ami merőleges $\underline{e}$-re és az O ponttól k távolságra van.

$$\Updownarrow$$

$$\underline{e}\cdot(\vec{OX} - k\cdot\underline{e}) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{e}\perp(\vec{OX} - k\cdot\underline{e})$$

① a)

$$\begin{array}{ccccc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}$$

$4\underline{k}$ $\quad -6\underline{i}$ $\quad 10\underline{j}$ $\quad 8\underline{i}$ $\quad 2\underline{j}$ $\quad -15\underline{k}$

$\underline{a}\times\underline{b} = 8\underline{i} + 2\underline{j} - 15\underline{k} - 4\underline{k} - (-6\underline{i}) - 10\underline{j} =$

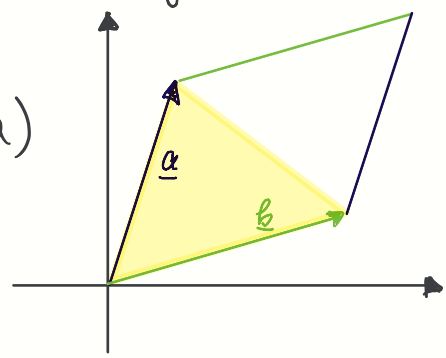
$= 14\underline{i} - 8\underline{j} - 19\underline{k} = (14, -8, -19)$

b)

$$\begin{array}{ccccc} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} & \underline{i} & \underline{j} \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 2 & 5 & 4 \end{array}$$

$\underline{b}\times\underline{a} = -6\underline{i} + 10\underline{j} + 4\underline{k}$
$-8\underline{i} + 15\underline{k} - 2\underline{j} =$
$= (-14, 8, 19) = -\underline{a}\times\underline{b}$

c) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét adja meg $|\underline{a}\times\underline{b}|$.
Ennek fele a kifeszített háromszög (lsd. ábra)



$$T(\triangle_{\underline{a},\underline{b}}) = \frac{\sqrt{14^2+8^2+19^2}}{2} = \frac{\sqrt{621}}{2}$$

②* $\underbrace{\underline{a}\times\underline{b} = \underline{a}\times\underline{c} \Rightarrow \underline{a}\times(\underline{b}-\underline{c})}_{\text{a vektoriális szorzás disztributivitása:}} = 0 \Leftrightarrow |\underline{a}| = 0 \quad |\underline{b}-\underline{c}| = 0$

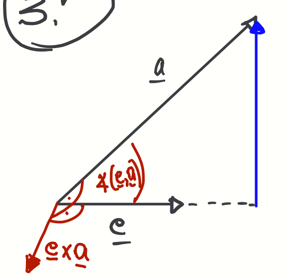
$\underline{v}.\ \sin\varphi = 0$,

ha $\underline{b}-\underline{c} = k\underline{a}$

a vektoriális szorzás disztributivitása:

$$\underline{a}\times\underline{b} - \underline{a}\times\underline{c} = \underline{a}\times(\underline{b}-\underline{c})$$

③*



$(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e} \perp \underline{e}$ ⇒ merőleges $\underline{e}$-re
$\perp \underline{e}\times\underline{a}$ ⇒ az $\underline{a}$ és $\underline{e}$ vektorok síkjában van

$|(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e}| = |\underline{e}\times\underline{a}|\cdot\underbrace{|\underline{e}|}_{=1}\cdot\underbrace{\sin\measuredangle(\underline{e}\times\underline{a},\underline{e})}_{\text{ez 1, mert } \underline{e}\times\underline{a}\perp\underline{e}} = |\underline{e}\times\underline{a}| = |\underline{e}|\cdot|\underline{a}|\cdot\sin\measuredangle(\underline{e},\underline{a})$

$= 1\cdot|\underline{a}|\cdot\sin\measuredangle(\underline{e},\underline{a})$

$= |\uparrow|$ = a merőleges komponens hossza

Megj. Ha $\underline{e}$ nem egységvektor: $\dfrac{(\underline{e}\times\underline{a})\times\underline{e}}{|\underline{e}|^2}$ adja a vektort

1. $\underline{a} = (0,2,3)$ $\underline{b} = (5,-1,2)$, $\underline{c} = (1,2,1)$

	1	2	3	1	2
$\underline{a}$	0	2	3	0	2
$\underline{b}$	5	−1	2	5	−1
$\underline{c}$	1	2	1	1	2

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 10 & 0 & 4 & 30 \end{array}$$

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = 0+4+30+3-0-10 = \underline{\underline{27}}$$

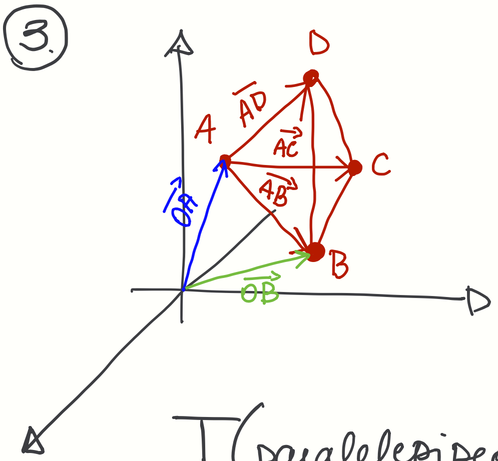
2. Egy síkban vannak $\Leftrightarrow$ az általuk kif. paralelepipedon térfogata 0.

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & z & 3 & 4 \end{array} \Rightarrow (\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c} = 3z + 12 + 20 - 3 - 24 - 10z$$

$$= 5 - 7z = 0$$

$$5 = 7z \to z = 5/7$$

3.



$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ v.sz.

$$\vec{OB} - \vec{OA} = (1,4,0) = \underline{u}$$
$$\vec{OC} - \vec{OA} = (-5,3,0) = \underline{v}$$
$$\vec{OD} - \vec{OA} = (-1,6,2) = \underline{w}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & 2 & -1 & 6 \end{array}$$

$$T(\text{paralelepipedon}) = |(\underline{u}\times\underline{v})\cdot\underline{w}| = 6+0+0-0-0+40 = 46$$

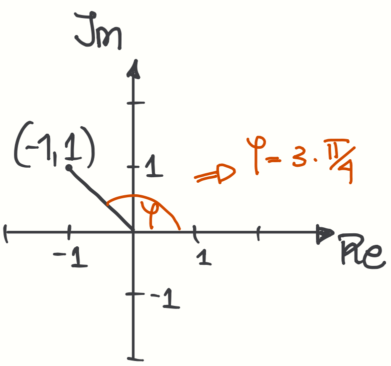
$$\Rightarrow T(\text{tetraéder}) = \frac{46}{6}$$

Bónusz (Komplex számok)

A/ $\sqrt[4]{-1+i} = z_{0,1,2,3}$

1. TRIGONOMETRIKUS ALAK:

$$\sqrt{1^2+1^2}\left(\cos\left(3\pi/4\right) + i\sin\left(3\pi/4\right)\right)$$



2. KÉPLET:

$$(\sqrt{2})^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi/4+2k\pi}{4}\right)\right] = z_k$$

$k = 0,1,2,3$

$k=0$: $(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\left(3\pi/16\right) + i\sin\left(3\pi/16\right)\right)$

$k=1$: $(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{16}\right)\right)$

$k=2$: $(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{16}\right)\right)$

$k=3$: $(\sqrt{2})^{1/4}\left(\cos\left(\frac{27\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{27\pi}{16}\right)\right)$

B/ Adjuk meg a $\boxed{z^4=-1}$ összes komplex megoldását!

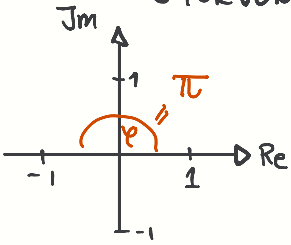
$z^4=-1 \iff z=\sqrt[4]{-1}$ KOMPLEX GYÖKVONÁS

1. -1 trig. alakja

$a=-1 \quad b=0$

$\Downarrow$

$r=\sqrt{(-1)^2}=1 \quad \varphi=\pi$



2. Képlet:

$$1^{1/4}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)\right)$$

$k=0 \quad 1\cdot\left(\cos\left(\underbrace{\pi/4}_{=\varphi_0}\right)+i\sin\left(\pi/4\right)\right)$

$k=1 \quad 1\cdot\left(\cos\left(\underbrace{3\pi/4}_{=\varphi_1}\right)+i\sin\left(3\pi/4\right)\right)$

$k=2 \quad 1\cdot\left(\cos\left(\underbrace{5\pi/4}_{=\varphi_2}\right)+i\sin\left(5\pi/4\right)\right)$

$k=3 \quad 1\cdot\left(\cos\left(\underbrace{7\pi/4}_{=\varphi_3}\right)+i\sin\left(7\pi/4\right)\right)$

geometriai $\Longrightarrow$ jelentés